Embodiment e multimodalità nella classe di matematica: Sviluppi e riflessioni recenti

(Article begins on next page)

Embodiment e multimodalità nella classe di matematica: sviluppi e riflessioni recenti

Sommario

La "svolta all'attività corporea" avvenuta nell'ultima decade ha caratterizzato le prospettive teoriche di molti ricercatori in didattica della matematica, rendendo popolare lo studio del corpo e del coinvolgimento corporeo nell'apprendere la matematica. In questo articolo, adottiamo la visione di una conoscenza matematica embodied e multimodale, tracciandone sviluppi che contestano qualsiasi dualismo mente/corpo. Prestare attenzione ai modi di parlare, di muoversi e di sentire degli studenti in classe come loro modi di pensare permette di rendersi conto di come l'apprendimento della matematica implichi il corpo e di come siano animati i concetti implicati nel contesto. Presentiamo degli episodi da una classe di scuola primaria per discutere tale prospettiva ed esemplificarne il potenziale didattico.

Abstract

The last decade "turn to bodily activity" has shaped the theoretical stances of many researchers in mathematics education, making popular the study of the body and bodily engagement in learning mathematics. In this paper, we pursue the vision of a multimodal and embodied mathematical cognition, tracing developments that question any body/mind dualism. Drawing attention to the students' ways of talking, moving and feeling as ways of thinking in the classroom, allows realising how mathematics learning implicates the body and how the concepts implicated in context are animated. We present primary classroom episodes to discuss this view and to exemplify its didactical potential.

Francesca Ferrara

Martina Seren Rosso

Embodiment e multimodalità nella classe di matematica: sviluppi e riflessioni recenti

Francesca Ferrara, Martina Seren Rosso

Dipartimento di Matematica "G. Peano", Università di Torino

1. Introduzione

In anni recenti, la ricerca in didattica della matematica ha studiato con attenzione via via crescente il ruolo del corpo nell'insegnamento e nell'apprendimento della disciplina. Nel corso degli ultimi quindici anni, gli interessi della ricerca sono variati e sono stati molteplici, arrivando a toccare campi diversi. La ricerca psicologica sulla gestualità, per esempio, agli inizi del ventunesimo secolo, iniziava a fornire supporto empirico alla presenza del corpo nei processi di pensiero (si vedano McNeill, 2000; Goldin-Meadow, 2003). Sempre in quegli stessi anni, la ricerca sull'*embodied cognition* nel campo delle scienze cognitive apriva nuove prospettive sul fatto che i processi cognitivi siano fondati sull'interazione del corpo con il mondo e su esperienze sensorie e motorie. Tali prospettive spostavano l'attenzione verso nuovi paradigmi che superassero il tradizionale dualismo cartesiano tra mente e corpo (Lakoff e Núñez, 2000; Seitz, 2000; Wilson, 2002). Attingendo da tali studi, la "svolta all'attività corporea" nelle visioni teoriche adottate dai ricercatori in didattica della matematica ha comportato un interesse sempre maggiore verso la natura delle attività corporee e delle risorse semiotiche utilizzate in classe, così come verso la funzione che queste possono rivestire nel fare matematica. Il riconoscimento dell'importanza del corpo nella costruzione di conoscenza ha condotto, da un lato, a congetture riguardanti il ruolo critico delle attività percettivo-motorie nel pensiero matematico (Nemirovsky, 2003), dall'altro lato, all'attenzione anche a fattori socio-culturali che sono coinvolti nell'apprendimento della nostra disciplina (Schiralli e Sinclair, 2003). Partendo dal presupposto che entrambi gli aspetti siano legati fortemente al conoscere in matematica, con questo lavoro intendiamo fornire nel panorama nazionale una visione sulla natura embodied e multimodale della conoscenza matematica. A tale scopo, presentiamo alcune riflessioni che permettono di teorizzare l'embodiment in classe e di discutere sulle ricadute che si possono avere dal punto di vista didattico.

2. Gesti e multimodalità in matematica

Nel 2009, la rivista *Educational Studies in Mathematics* (rivista di rilevanza internazionale per la ricerca in didattica della matematica) ha pubblicato un volume speciale sul tema: "Gesti e multimodalità nella costruzione di significati matematici". Il volume raccoglieva alcuni studi che erano frutto di ricerche recenti sulla vasta gamma di risorse percettive, fisiche e cognitive che le persone utilizzano quando hanno a che fare con le idee matematiche (Arzarello e Robutti, 2009). Questi studi avevano una filosofia comune di base: negli atti di conoscenza, sono parte integrante dei nostri processi cognitivi diverse modalità sensorie: tattile, percettiva e cinestetica (Radford, Edwards e Arzarello, 2009). Ciascuno studio aveva poi caratteristiche proprie legate a interessi specifici. Per esempio, Arzarello, Paola, Robutti e Sabena (2009) hanno studiato come, nel fare matematica, i gesti siano risorse semiotiche che gli insegnanti e gli studenti utilizzano in modo multimodale e hanno introdotto la nozione di gioco semiotico dell'insegnante. Radford (2009) ha discusso invece perché i gesti siano importanti da una prospettiva culturale, introducendo la visione di una "*sensuous cognition*" (mal tradotto, una "conoscenza dei sensi"), secondo cui "il pensiero non si presenta solamente *nella* mente ma anche *in* e *attraverso* una sofisticata coordinazione semiotica del discorso, del corpo, dei gesti, dei simboli e degli strumenti" (p. 111). Roth (2009) ha proposto una lettura fenomenologica per la quale i concetti matematici non sono astrazioni che trascendono l'attività corporea, bensì emergono "nell'esperienza e attraverso di essa, sempre consistendo in null'altro se non nell'attivazione di esperienze precedenti (tracce corporee embodied di esse)" (p. 188). Solo per citarne alcuni. Sebbene tali ricerche siano compatibili con l'idea del potenziale cognitivo che le "modalità multiple" possono avere nella classe di matematica, esse lasciano però aperta una questione: il problema del ruolo della(e) multimodalità nell'apprendimento non si può ridurre ad ammettere che essa(e) abbia(no) qualcosa a che vedere con la costruzione di significati. Il nostro contributo nasce proprio in quest'ottica e vuole approfondire *il modo* in cui gli aspetti multimodali ed embodied si manifestano in classe, fornendo anche ai docenti una chiave di lettura dei processi dei loro studenti. A tale scopo, nella sezione successiva prendiamo in considerazione le origini dell'idea di una conoscenza embodied e multimodale e il legame con le attività percettivo-motorie, per arrivare alle argomentazioni più recenti.

3. Conoscenza embodied e attività percettivo-motorie

La teoria dell'embodiment, nei suoi sviluppi iniziali provenienti dalle scienze cognitive, metteva in luce che non solo abitiamo i nostri corpi, ma li usiamo letteralmente per pensare (Seitz, 2000). Il lavoro di Lakoff e Núñez (2000/2005), intitolato "Da dove viene la matematica", sosteneva che le esperienze senso-motorie realizzano il pensiero e la comprensione mediante l'attivazione di meccanismi metaforici. Classici esempi sono dati, in matematica, dal nostro concepire gli insiemi come contenitori e i numeri come posizioni nello spazio. Se Lakoff e Núñez pensavano a metafore nella mente, le ricerche in didattica della matematica erano indirizzate più al coinvolgimento del corpo come ingrediente naturale dei processi di apprendimento della matematica, vale a dire, ai "modi corporei di pensare" che nascono dall'attività in classe e la costituiscono. Nemirovsky (2003), ad esempio, ha affermato che l'apprendimento della matematica si sviluppa in gran parte da attività percettivo-motorie che possono riguardare cose ed eventi specifici o essere auto-referenziali. Le azioni (anche quelle che si intraprendono nel fare matematica, come il semplice scrivere un'equazione), i gesti, la manipolazione di materiali, l'utilizzo di strumenti, gli atti di disegnare, la coordinazione senso-motoria, il movimento degli occhi e le espressioni facciali sono, tutti, attività percettivo-motorie. Radford (2009) li considera aspetti "di senso" ("*sensuous*") della conoscenza matematica, risorse semiotiche che sono vere costituenti del pensiero astratto. Anche risultati recenti di stampo neuro-scientifico hanno sostenuto il ruolo che le esperienze percettive, sensorie e motorie possono avere nell'apprendimento. In particolare, Gallese e Lakoff (2005) hanno evidenziato che il sistema senso-motorio caratterizza il contenuto semantico dei concetti in termini del modo in cui funzioniamo con i nostri corpi nel mondo. Speciali neuroni, tra cui i famosi neuroni specchio, sono intrinsecamente multimodali, cioè la loro attivazione si può correlare sia con l'osservazione sia con l'esecuzione di un'azione, persino con la sua immaginazione. Questo escluderebbe l'esistenza di aree cerebrali separate preposte all'azione e alla percezione e associate solo mediante una sorta di motore centrale. Al contrario, le modalità sensorie, come la vista, il tatto, l'udito, e così via, sono integrate tra loro e anche con il controllo e la pianificazione motori. Per Gallese e Lakoff l'immaginazione è una forma di simulazione del cervello. Eppure, forse, c'è qualcosa di molto più viscerale. Un fiore, per esempio, si può percepire in modi completamente diversi secondo i possibili profumi che si ricevono da esso. Anche i modi di raccoglierlo saranno del tutto diversi se vi è o meno la possibilità di essere punti dalle sue spine. Dunque, anche l'immaginare ha un ruolo cruciale ed è parte di ogni attività percettiva e motoria. In matematica, pensiamo alla risoluzione di un'equazione di secondo grado. La si può percepire in modi distinti di fronte alla possibilità di fattorizzare il trinomio corrispondente, di applicare la formula per le radici, o di disegnarne il grafico. L'immaginazione matematica è perciò un 'trattenere' possibilità di azione, da cui la necessità di considerare l'unità multimodale di attività percettivo-motorio-immaginative (Nemirovsky e Ferrara, 2009). Certamente, la dimensione cognitiva è un solo lato della medaglia, l'altro è quello dell'interazione e della comunicazione in classe, dove gli studenti confrontano e condividono le proprie idee con i propri pari e con l'insegnante. È proprio nel tentativo di unire i due lati che la ricercatrice israeliana Anna Sfard (2008/2009) introduce il termine *commognition* (commognizione), che fonde insieme comunicazione e cognizione. Sfard assume una visione partecipazionista, per la quale il pensare è comunicare. Si tratta di una posizione diversa da quella secondo cui il pensare è manipolare strutture mentali, come concezioni o schemi, che chi apprende deve acquisire (una visione acquisizionista questa, propria anche del costruttivismo piagetiano). In quest'ottica, ciò che gli studenti dicono e fanno in classe, i modi in cui parlano e si muovono che sono anche modi di sentire, sono forme comunicative su cui focalizzare l'attenzione. Si tratta di una posizione che vuole evitare inferenze sulla presenza di meccanismi nella mente, dove la conoscenza è trasferita da azioni, parole ed emozioni. Meccanismi e schemi erano invece ancora richiamati dalla visione metaforica, pur nuova allora, dell'embodied cognition. Gli studi più recenti che teorizzano l'embodiment nella classe di matematica, tra cui quelli di Elizabeth de Freitas e Nathalie Sinclair, di Ricardo Nemirovsky e di Luis Radford, sviluppano, seppur ciascuno secondo la propria prospettiva teorica e con intento partecipazionista, visioni non dualistiche di mente e corpo, interno ed esterno, percettivo e concettuale, materiale e concettuale (ad esempio, de Freitas e Sinclair, 2014; Nemirovsky et al., 2013; Radford, 2014a). In questo articolo, assumiamo una posizione non dualistica in linea con tali studi, per cui i modi di parlare, di fare e di sentire degli studenti non sono solo modi di comunicare e di pensare, ma diventano anche modi attraverso cui animare e mettere in movimento (de Freitas e Sinclair direbbero "mobilizzare", come a volergli dare 'corpo') gli stessi concetti matematici. Nella sezione successiva prendiamo in esame un esempio dalla classe per dare voce a questa prospettiva.

4. Un esempio dalla classe

4.1 Il contesto

L'esempio che presentiamo fa parte di una ricerca che ha coinvolto una classe di 21 bambini in una sperimentazione di cinque anni con attività laboratoriali il cui scopo era l'avvio al pensiero algebrico nella scuola primaria, mediante la ricerca di regolarità in sequenze di numeri e di figure e la scoperta di strutture in problemi. Aspetti contenutistici e metodologici della ricerca sono messi in luce anche nelle attuali Indicazioni Nazionali per il primo ciclo (MIUR, 2012). Tra gli obiettivi, traguardi e competenze, le Indicazioni considerano aspetti quali: "riconoscere e descrivere regolarità in una sequenza di numeri o di figure" (p. 63), l'alunno "legge e comprende testi che coinvolgono aspetti logici e matematici" e riesce a risolvere problemi, "mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati" (p. 61). Numerosi sono poi i riferimenti alla centralità della persona, un esempio su tutti: "lo studente è posto al centro dell'azione educativa in tutti i suoi aspetti: cognitivi, affettivi, relazionali, corporei, estetici, etici, spirituali, religiosi." (p. 5). Una conoscenza embodied e multimodale è supportata indirettamente da questioni di metodo, che sottolineano l'importanza del movimento, del gioco e dell'esperienza, ad esempio le seguenti: "L'esperimento, la manipolazione, il gioco, la narrazione, le espressioni artistiche e musicali sono [...] occasioni privilegiate per apprendere per via pratica quello che successivamente dovrà essere fatto oggetto di più elaborate conoscenze teoriche e sperimentali" (p. 7); "I linguaggi a disposizione dei bambini, come la voce, il gesto, la drammatizzazione, i suoni, la musica, la manipolazione dei materiali, le esperienze grafico-pittoriche, i mass-media, vanno scoperti ed educati perché sviluppino nei piccoli il senso del bello, la conoscenza di se stessi, degli altri e della realtà" (p. 20). Sempre in linea con le indicazioni ministeriali, le attività hanno coinvolto i bambini attivamente nella costruzione del sapere, sollecitandoli a riflettere e incoraggiandoli a esplicitare modi di comprendere e a comunicarli, promuovendo consapevolezza del proprio apprendere.

4.2 I partecipanti e la metodologia

La classe coinvolta frequentava, al tempo dello studio, il quinto anno di una scuola primaria di Chieri, in provincia di Torino. Le attività sono state progettate a due mani, dal primo autore e dalla maestra della classe, Ketty Savioli, che fa parte del nucleo di ricerca didattica di Torino e senza la quale la ricerca non sarebbe esistita. La sperimentazione è stata guidata dal primo autore che coordinava la classe durante le attività. I bambini hanno lavorato secondo la metodologia del laboratorio di matematica (per la cui introduzione rimandiamo ad Anichini et al., 2004) prendendo parte sia ad attività individuali sia a lavori a coppie sia a discussioni collettive, in sintonia con i suggerimenti delle Indicazioni sul formare la classe come gruppo. La maestra era presente a ogni incontro come osservatore e interveniva laddove lo ritenesse opportuno. Anche il secondo autore era presente in classe come osservatore, nel caso specifico dell'attività analizzata, e aveva il compito di filmare il lavoro dei bambini, che accanto ai protocolli (le loro produzioni scritte) fornisce i dati di analisi.

4.3 L'attività

L’attività sulla quale poniamo l’attenzione prende il nome: “Come fa Martina?” ed è l'ultima delle attività che caratterizzano l'anno finale di sperimentazione. Si tratta di un'attività argomentativa sulla quale ai bambini è data una consegna scritta che riprende e adatta il famoso gioco "Pensa un numero", usualmente studiato per la scuola secondaria di primo grado (ad esempio, Testera et al., 2011). I bambini hanno lavorato molto negli anni precedenti con sequenze di numeri e di figure sulla ricerca di regolarità numeriche e geometriche, mediante consegne scritte su schede individuali e di gruppo. In quinta, invece, hanno iniziato a ragionare su proprietà dei numeri naturali come quelle che coinvolgono la somma e il prodotto di due o più numeri consecutivi (eventualmente pari/dispari), o il concetto di multiplo, sempre delicato, e su altri tipi di compiti che mettano in gioco la nozione di variabile (d'altra parte, la ricerca ha messo in evidenza come forme embodied di pensiero algebrico siano accessibili già in età precoce: ad esempio, Radford, 2014b; Brizuela et al., 2015). In "Come fa Martina?", i bambini lavorano suddivisi a coppie e il compito dato loro è posto con un narrativo in forma scritta su una scheda da completare. La matematica Martina propone il gioco "Pensa a un numero" con i seguenti passi:

Pensate a un numero intero
Moltiplicatelo per due
Sommate al risultato il numero dieci
Dividete il risultato ottenuto per due
Sottraete al nuovo risultato il numero 5
Al risultato ottenuto, sottraete il numero che avevate pensato.

Il testo chiede innanzitutto di trascrivere il risultato finale, quindi afferma che Martina sa indovinare questo risultato, qualunque sia il numero pensato in partenza. Due sono i compiti per i bambini. Il primo chiede come fa Martina a indovinare sempre il risultato. Il secondo richiede invece di indicare il numero di partenza con una lettera a scelta e di trasformare i passaggi del gioco utilizzando tale lettera. Al fondo si trova un foglio bianco con su scritto: "Spazio dei ragionamenti", dove i bambini possono argomentare le proprie risposte (i bambini sono soliti argomentare nella pratica didattica adottata dalla maestra in classe; lo spazio dei ragionamenti è per loro uno spazio aperto di spiegazione dei perché e di motivazione delle scelte). La classe suddivisa a coppie ha affrontato l'attività senza alcuna discussione preliminare. Vediamo ora alcuni esempi di come i bambini si sono comportati in questa situazione, primo fra tutti quello di Agnese e Veronica.

4.4 Agnese e Veronica

Le due bambine hanno capito che, con i passi assegnati, il risultato del gioco è sempre 0. Nell'episodio seguente discutono del perché, ossia di una possibile giustificazione di questo fatto.

Veronica: *Perché in pratica qua, cioè, un numero intero, dieci per esempio, no?* (Con la mano destra aperta in aria fissa una partenza; la mano sinistra indica il primo passo del gioco; Fig. 1a) *Lo moltiplichi per due, venti* (La mano destra ruota in avanti, verso Agnese; Fig. 1b e 1c). *Somma al risultato il numero dieci, quindi trenta* (La mano destra si muove come prima)*, poi se dividi il risultato per due fa quindici* (La mano destra torna indietro, con la sinistra a indicare il passo; Fig. 2)

Figura 1: a. "dieci per esempio"; b.-c. "Lo moltiplichi per due, venti"

Figura 2: La mano destra torna indietro, più vicino a sé

Agnese: *Aspetta, aspetta*

Veronica: *Quindi fai, moltiplichi per due e sommi al risultato il numero dieci*

Agnese: *Qui* (Indica il passo di sommare 10) *ti fa solo andare avanti!*

Veronica: *Di dieci! Perché in pratica continui, man mano sottrai, sottrai e ti viene zero! Perché prima lo moltiplichi per due, poi sommi dieci, poi devi dividere il risultato per due* (La mano destra si muove come prima per indicare l'andare avanti; Fig. 3a)*, quindi togli, poi devi sottrarre il numero cinque, ok* (Sposta la mano marcatamente indietro; Figg. 3b e 3c) *poi ti viene il numero che hai pensato* (Incrocia le mani perpendicolarmente a fissare il risultato; Fig. 3d) *cioè ti viene tre gli sottrai tre e ti viene zero* (Usa l'esempio precedente del numero 3)*. Perché è fatto in modo che poi alla fine ti venga tre, il numero che hai pensato all'inizio e così viene zero*

Agnese: *Sì, qua* (Indica con la penna i primi tre passaggi del gioco; Fig. 3d) *praticamente ti fa solo andare avanti*

Veronica: *E poi ti fa tornare indietro*

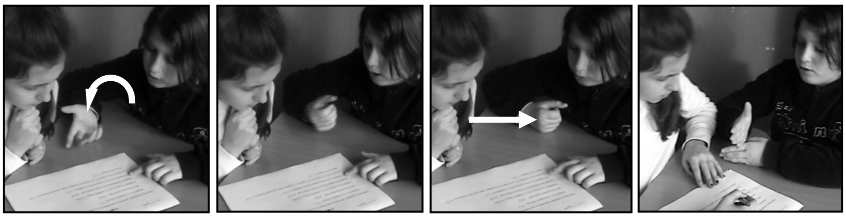

Figura 3: a. Veronica immagina di andare avanti; b.-c. togliere; d. fissare la fine

Dai modi di parlare e di muoversi di Veronica, possiamo notare come il problema sia 'trasportato' dalle bambine su un piano più materiale rispetto a quello iniziale delle sole operazioni aritmetiche fornite dai diversi passaggi del gioco. I gesti di Veronica, seguiti con attenzione dagli occhi di Agnese, accompagnano il numero di partenza nelle diverse trasformazioni che esso subisce nel corso del gioco, animandolo anche con le parole. Il numero da cui si parte diviene così mobile, superando quella staticità apparente del finale, che è sempre 0: una variabile, che a partire dal numero iniziale pensato 'tocca' vari valori, attraverso i risultati successivi delle operazioni che Veronica rende presenti sul banco con i gesti della mano destra, spostandola prima in avanti poi facendola tornare indietro. Questi stessi movimenti di andata e ritorno, che attualizzano le operazioni dirette e opposte/inverse, sono seguiti da Agnese con lo sguardo ed espressi nel parlato da entrambe le bambine, che condividono l'"in pratica" e il "praticamente" e un linguaggio fatto di azioni di movimento: il "ti fa solo andare avanti" ripetuto di Agnese, il "continui" e il "ti fa tornare indietro" di Veronica (come se fosse il gioco a muoverle). Il passo delle trasformazioni algebriche è tenuto nel contempo dalla mano sinistra di Veronica che si sposta lungo i passaggi forniti sul foglio e dalla penna con cui Agnese indica i soli movimenti di 'andata' ("qui", "man mano", "qua"): la moltiplicazione per 2 e la somma del 10. A questi movimenti si contrappongono quelli del 'ritorno': "poi devi dividere il risultato per due" e "quindi togli, poi devi sottrarre il numero cinque". È così che i movimenti di andata e ritorno fanno tornare sempre al punto di partenza, qualunque esso sia: "poi ti viene il numero che hai pensato". Ed ecco il gesto delle due mani che si incrociano con cui Veronica generalizza il ragionamento, pur pensando all'esempio del numero tre utilizzato in precedenza: "è fatto in modo che poi alla fine ti venga tre, il numero che hai pensato all'inizio e così viene zero". Scegliendo successivamente un altro esempio numerico (qui non riportato), la mano di Veronica replicherà i gesti delle Figure 1 e 2, seppur in punti diversi sul banco e meno marcati, ma i movimenti associati alle trasformazioni nel gioco non cambieranno. Di nuovo la mano destra di Veronica si sposterà in avanti, per 'moltiplicare' e 'aggiungere', e indietro, nel momento di 'dividere' e 'sottrarre', arrivando a fissarsi sul numero pensato, con un gesto come quello di Figura 3d. Questo evidenzia come la struttura del gioco sia racchiusa nei movimenti e nelle parole di Veronica e negli sguardi di Agnese che la seguono. C'è anche la parte variabile: il numero pensato in partenza con le sue successive trasformazioni. Interessante è il fatto che nel gesto finale ritorni la staticità del risultato del gioco, dello 0, con le due mani poste perpendicolarmente quasi a indicare operazioni opposte, di cui l'una annulla il risultato dell'altra quando applicata a esso. Il movimento corporeo, che è fatto non solo di gesti e di sguardi, ma anche delle posture di Agnese e Veronica, entrambe tese verso il foglio con i passi e verso il centro del banco, è parte di un movimento più ampio e complesso che coinvolge anche il gioco, le operazioni in esso implicate e i numeri. Il gioco è il soggetto di quelle azioni dell'andare avanti e indietro ("ti fa", "è fatto in modo che"), che, pensate come operazioni, sono personificate dal "tu" con cui Veronica comunica con Agnese ("continui", "sottrai", "ti viene", ecc.). Il gioco fa muovere le bambine: ti fa "andare avanti" e "tornare indietro". È in tal senso che il gioco, le operazioni e i numeri che esse considerano e restituiscono sono incorporati nella situazione così come animati dalle due bambine. I modi di parlare e di muoversi di Agnese e Veronica sono modi di comunicare e di pensare che materializzano, rendono presente, l'essere mobile dei concetti. Riconoscerli come tali ci permette in primis di poterli osservare e, dunque, valorizzare come modi di apprendere all'interno della classe di matematica.

4.5 Dai protocolli

Questo movimento della matematica del gioco si ritrova anche nei protocolli scritti prodotti dalle due bambine. Per rispondere come fa Martina a indovinare il risultato finale (la prima richiesta), Agnese e Veronica scrivono lasciando implicito che il soggetto sia il gioco: "perché: Ti fa andare avanti facendo × 2 però, dopo un altro passaggio ti fa tornare indietro facendoti dividere per 2" (Fig. 4).

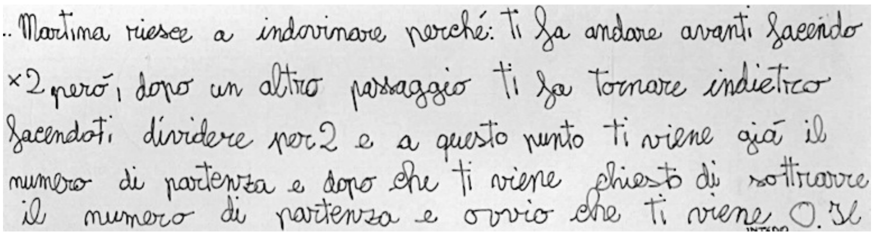
.. Martina riesce a indovinare perché: Ti fa andare avanti facendo ×2 però, dopo un altro passaggio ti fa tornare indietro facendoti dividere per 2 e a questo punto ti viene già il numero di partenza e dopo che ti viene chiesto di sottrarre il numero di partenza e ovvio che ti viene 0. Il

Figura 4: La spiegazione scritta di Agnese e Veronica

Il ragionamento esplicitato dalle bambine per iscritto assume un carattere ancora più generale rispetto agli esempi numerici utilizzati inizialmente per la comprensione. Da questa generalità emerge una parte della struttura soggiacente: il fatto che la moltiplicazione per 2 prima e quindi la divisione per 2 implichino che "a questo punto ti viene già il numero di partenza e dopo che ti viene chiesto di sottrarre il numero di partenza è ovvio che ti viene 0". È di nuovo interessante qui la presenza del "tu" che le bambine richiamano per pensare a ciò che il gioco "ti fa" fare e con cui giustificano che "Martina riesce a indovinare" il risultato. Quando poi la seconda richiesta dell'attività spinge Agnese e Veronica a introdurre una lettera con cui indicare il numero di partenza e provare a sviluppare i passi del gioco, le due bambine arrivano a scrivere un'espressione letterale che, tuttavia, contiene degli errori e che richiama subito un esempio numerico (Fig. 5). Mentre le operazioni richieste dai primi tre passaggi sono 'tradotte' in modo opportuno, con un uso corretto delle diverse parentesi (graffa, quadra e tonda), la seconda parte dell'espressione, prima dell'uguale, ben individuata dalla coppia finale di parentesi quadre, tende a isolare le operazioni a seguire.

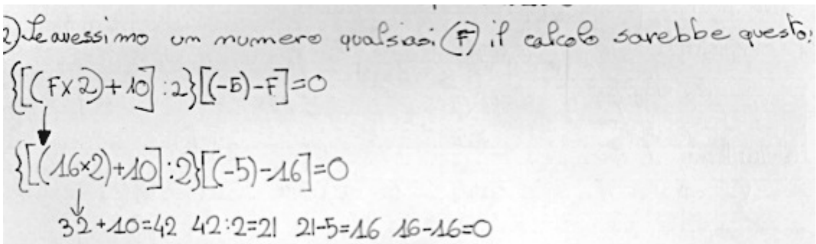

Figura 5: L'espressione letterale di Agnese e Veronica

Questo mette in luce la complessità di un'unica scrittura che possa incorporare tutte le trasformazioni subite dal risultato con un certo numero di passaggi consecutivi. Non è neppure facile associare alla lettera scelta *F* il ruolo di variabile, come mostra la freccia verticale che riporta alla dimensione numerica, inizialmente di pura riscrittura dei passaggi con il numero 16 al posto di *F*, poi prendendo in considerazione le singole operazioni e i loro risultati. Ci sembra in ogni caso di poter sottolineare positivamente il tentativo con cui Agnese e Veronica hanno cercato di trasformare i passaggi del gioco usando la lettera *F*. Il controllo finale (più in basso) con il numero 16, infatti, induce a intravedere la possibilità che le bambine abbiano comunque colto la struttura del gioco, seppur non siano ancora in grado di scriverla senza ambiguità sotto forma di espressione letterale.

Un modo diverso di mobilizzare la 'simmetria' presentata dal gioco, tra i primi tre passaggi e i secondi tre, è quello scelto da un'altra coppia di bambini: Elisabetta e Simone. Se Agnese e Veronica si esprimono dicendo che il gioco "ti fa andare avanti" e poi "ti fa tornare indietro", per Elisabetta e Simone si tratta più di numeri che si "distruggono" o che si "mettono insieme", oppure di numeri che si "sono messi contro" ad altri numeri, come si può leggere dal loro protocollo (Fig. 6). Elisabetta e Simone introducono nuovi modi di dire per spiegare il loro ragionamento, associando le operazioni opposte o inverse tra loro e con le differenze tra risultati successivi.

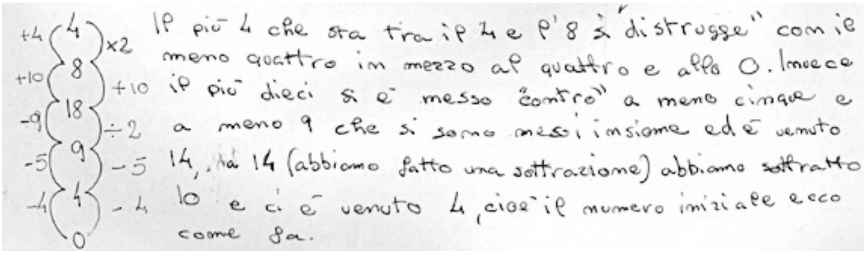

Figura 6: Numeri che si "distruggono" e che si "mettono insieme"

Ecco che "il più 4" si distrugge con "il meno quattro", mentre "il più dieci" si è messo contro "a meno cinque e a meno 9 che si sono messi insieme". La distruzione diviene così il modo attraverso cui i bambini parlano di numeri che si elidono (opposti) o che si semplificano a vicenda (inversi), mentre il mettersi assieme quello con cui parlare di somme. È un modo nuovo di mobilizzare numeri e operazioni, sviluppando una conoscenza embodied del gioco.
Prendiamo in esame ancora un'ultima coppia: Filippo e Riccardo. I due bambini ragionano principalmente sulla suddivisione del gioco in due parti, ancora una volta analoghe all'andare avanti e al tornare indietro di Agnese e Veronica. Scelta *P* per il numero di partenza, riscrivono i passaggi del gioco creando il diagramma di Figura 7.

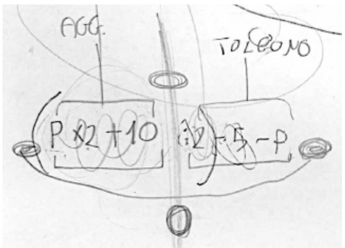

Figura 7: Il diagramma creato da Filippo e Riccardo

Il diagramma appare pasticciato ma presenta chiaramente molto di più della scrittura algebrica prodotta. La divisione in due parti del gioco è attualizzata nettamente dalla riga verticale posta nel mezzo. Alla sinistra della riga sono condensati in una sola espressione quei passi del gioco che "aggiungono" (il blocco di sinistra, *P*×2+10, è collegato all'abbreviazione "AGG."). A destra si ritrovano invece i passi che "tolgono" (:2−5−*P*). Le parentesi tonde aggiunte in un secondo momento (come reso visibile dal protocollo, dove sono scritte a penna, non a matita come il resto) fissano il momento in cui può essere sottratto 5, vale a dire dopo la divisione per 2, il che permette di rendere presente la relazione tra il secondo passaggio ("Sommate al risultato il numero dieci") e il quarto ("Sottraete al nuovo risultato il numero 5"). La linea curva disegnata proprio sotto i simboli, che collega due 'specie' di punti, quello di partenza e quello di arrivo (a sinistra e a destra, rispettivamente), sembra inoltre indicare una sorta di bilanciamento, di equilibrio, tra le due parti in cui è stato suddiviso il gioco. Le azioni di aggiungere e togliere, virtualmente contenute nei due 'bracci' del diagramma, mobilizzano i numeri, le operazioni e le relazioni tra di essi, per dare 0 alla fine (il numero è scritto proprio sotto la linea curva, in posizione centrale). I modi di comunicare di Filippo e Riccardo tradiscono di nuovo una conoscenza embodied della situazione, per la quale sono posti in movimento anche i concetti. A questo punto e vista la precisione dello scritto, diventa interessante evidenziare il processo con cui i due bambini hanno creato il diagramma.

4.6 Come Filippo e Riccardo arrivano al diagramma

Letto il testo, Filippo e Riccardo iniziano a considerare il gioco da punti di vista diversi, l'uno introducendo il numero 6 e l'altro subito la lettera *P*, come risulta dalle primissime battute del loro dialogo:

Riccardo: *Scrivi bene dai! Allora: 6*
Filippo: *P, P, P, P!* (Tono insistente)
Riccardo: *No no, P dopo*
Filippo: *E io faccio P!*

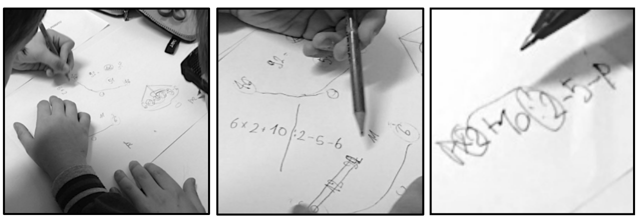

Figura 8: a. I bambini lavorano in parallelo; b.-c. con il 6 e con *P*

I due bambini procedono parallelamente, Riccardo svolgendo i vari passaggi con il 6 e Filippo sviluppandoli con P, scrivendo entrambi sul medesimo foglio e sfruttando le sue direzioni: Filippo il lato più lungo del foglio, Riccardo dalla parte del lato più corto (Fig. 8a).

Filippo: *P per due, più dieci*
Riccardo: *Ma non hai fatto neanche quello normale e vuoi fare P?*
Filippo: *Diviso due, meno cinque, meno...*
Riccardo: *Meno P*
Filippo: *Allora, il per due è uguale quindi a fare questo* (Nel mentre cerchia il "×2" e il ":2" e li unisce; Fig. 8c) *perché*
Riccardo: *Sì, perché*
Filippo: *No, ho capito! Allora perché quando fai moltiplicato un numero per due, poi lo dividi per due... però sommo dieci*
Riccardo: *Sommo dieci che è la somma massima, guarda, guarda Fili* (Ragiona sulla scrittura con il numero 6; Fig. 8b)*, questo, questo è come essere la metà* (Indica la riga di mezzo da lui disegnata; Fig. 9a)
Filippo: *Aspetta, aspetta*
Riccardo: *Filiii*
Filippo: *Allora, allora se fai P per due, fa P per... sì, poi fai più dieci, poi fai diviso due* (Con la penna segue i passi nella sua scrittura contenente P)*, essendo più dieci e dividendo per due, ti viene... dividi anche il dieci, che fa cinque. Poi togli ancora cinque, per questo in pratica hai tolto il dieci, e poi fai meno P che... ti viene zero! Allora, mi ascolti o no?*
Riccardo: *Sì, è quello che ti volevo dire! In teoria. Comunque non abbiamo neanche letto la domanda*
Filippo: *Allora se dividi questo* (Con la penna incornicia la prima parte dell'espressione: $P\times2+10$, Fig. 9b) *per, diviso due, all'inizio hai fatto per due, per due e hai aggiunto il dieci, poi se fai diviso due dividi anche il dieci*
Riccardo: *Non abbiamo neanche letto la domanda, solo per dirti!*
Filippo: *Aspetta! Dividi anche il dieci se fai diviso due, poi se si toglie ancora il cinque, togli tutto il dieci, e meno P, in pratica questo* (Indica $P\times2$)

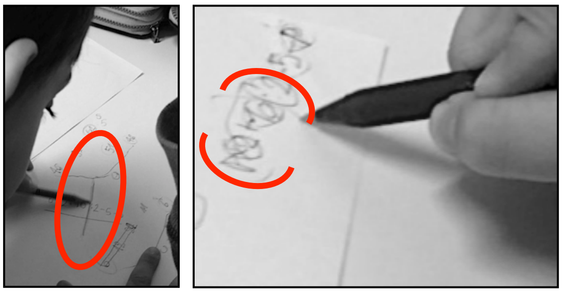

Figura 9: a. Riccardo indica la "metà"; b. Filippo cerchia $P \times 2+10$

In questo estratto emerge piuttosto chiaramente la partenza da cui si è originato il diagramma che abbiamo commentato sopra. Filippo e Riccardo sembrano muoversi e parlare ciascuno per sé, ma in realtà Riccardo segue il ragionamento generale che Filippo fa utilizzando la lettera *P*, come dimostrano in particolare i suoi due interventi: "Meno *P*" e "Sì, perché", con cui sembra quasi completare quanto avanzato da Filippo. Il gesto sulla riga di mezzo con cui Riccardo materializza la sua idea di "essere la metà" rilancia quello di unire "×2" e ":2", con cui Filippo prima individua e poi unisce le due operazioni che nel parlato riduce a essere uguali: "il per due è uguale quindi a fare questo" (pur intendendo il loro essere invece inverse). È da questo momento in poi che la metà cui fa riferimento Riccardo induce Filippo a ricercare davvero la struttura, ancora non del tutto chiara, data anche la mancanza totale di parentesi nella scrittura in simboli. E le prime parentesi compaiono quando Filippo cerchia il blocco iniziale $P \times 2+10$, anche se sono materializzate solo grazie al movimento circolare della penna attorno all'espressione scritta. Di nuovo, vediamo come i modi di parlare e di muoversi dei bambini sono modi di mobilizzare la matematica del gioco e di farne venire a galla la struttura, che diciamo 'simmetrica' a intendere l'annullarsi dei passaggi di andata con quelli di ritorno, per cui "ti viene zero!".

5. Riflessioni conclusive

Con gli esempi presentati nella sezione precedente, abbiamo voluto dare voce a una prospettiva partecipazionista che riconosce i modi di parlare, di fare, di muoversi degli studenti in classe come modi di pensare. Una prospettiva che si distanzia da visioni dualistiche che distinguono ancora tra mente e corpo, percettivo e concettuale, e che accettano l'esistenza di schemi o di rappresentazioni mentali da far acquisire a chi apprende. Agnese e Veronica da un lato, Filippo e Riccardo dall'altro, ci hanno mostrato che azioni, gesti, parole, sguardi, emozioni si mescolano in un intricato corpo di modalità che coinvolge anche i significati matematici che sono costruiti via via. I protocolli scritti prodotti dagli studenti e i loro diagrammi incorporano attività percettive, motorie e immaginative, che danno corpo, non solo metaforicamente, alle relazioni e ai significati e che mettono in movimento i concetti matematici. Per Agnese e Veronica, la matematica si muove con i movimenti dell'andare avanti e del tornare indietro che il gioco ti fa fare. Per Elisabetta e Simone, con i numeri che si distruggono e quelli che si mettono insieme. Infine, per Filippo e Riccardo, con la metà e il per due che è uguale al fare diviso due. E per Francesco, bambino con chiari tratti autistici, che qui non abbiamo preso in considerazione per mancanza di spazio, con il gesticolare alto delle braccia in aria la simmetria del gioco, mentre cerca di spiegarne la soluzione al compagno. Il movimento del corpo, cui negli ultimi decenni è stato attribuito un ruolo costitutivo nei processi di pensiero, è parte di un movimento più ampio che, se nel nostro caso coinvolge anche il gioco e i suoi passaggi, i numeri e la nozione di variabile, più in generale può caratterizzare i concetti matematici implicati in altri contesti e altre situazioni. Si tratta di un movimento che è reso palpabile e si può cogliere proprio con un'attenzione al movimento del corpo e alle azioni prodotte dagli studenti. La conoscenza embodied, o "dei sensi", di cui abbiamo parlato, cresce nella classe di matematica così. Abituarsi, divenire attenti, ai modi di muoversi, di fare, di dire, di sentire dei nostri studenti significa imparare a osservare i loro modi di pensare, a rendersi conto di essi. Significa accettarli come forma di apprendimento, ancor prima che di comunicazione. Significa anche abituarsi a forme di pensiero non sempre pulite, belle. Stralci del pensiero. Perché un diagramma è spesso frutto di un movimento che racchiude in sé le azioni da cui si è generato e la virtualità di nuove dimensioni future. La relazione gesti/diagrammi è generativa quanto quella tra muoversi e pensare. Significa in ultimo e più in generale imparare a osservare chi ci sta di fronte, anche attraverso quei canali espressivi a volte complessi, come quelli percettivo e sensibile (nel senso dei sensi), che agli occhi di un docente potrebbero persino apparire secondari. Questo è molto importante dal punto di vista prettamente didattico. Un insegnante che sappia cogliere la portata dei codici espressivi che circolano nella classe saprà monitorare l'apprendimento e cogliere le difficoltà incontrate dai suoi allievi, ma anche fare delle diversità e delle differenze una ricchezza per tutti. Saprà di conseguenza acquisire una più fine sensibilità rispetto a momenti di valutazione formativa. È fondamentale, come si legge in Arzarello et al. (2011), che i docenti acquisiscano "la capacità di accorgersi dei processi in atto nei momenti cruciali di costruzione di conoscenza", così come "la capacità di elaborare (e poco per volta padroneggiare) interventi idonei a favorire tali processi". Interventi e, vogliamo aggiungere, momenti creativi che sappiano dare il giusto spazio ai modi di comunicare, di essere, di immaginare di coloro che apprendono.

Riferimenti bibliografici

Anichini, G., Arzarello, F., Ciarrapico, L. & Robutti, O. (2004, a cura di). *Matematica 2003. La matematica per il cittadino. Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica (Ciclo secondario)*. Lucca: Matteoni Stampatore.

Arzarello, F. & Robutti, O. (2009). Embodiment e multimodalità dell'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 32A-B*(3), 243-268.

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O. & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 97-109.

Arzarello, F., Bazzini, L., Ferrara, F., Sabena, C., Andrà, C., Merlo, D., Savioli, K. & Villa, B. (2011). *Matematica: non è solo questione di* *testa. Strumenti per osservare i processi di apprendimento in classe*. Trento: Centro Studi Erickson.

Brizuela, B.M., Blanton, M. Sawrey, K. Newman-Owens, A. & Murphy Gardiner, A. (2015). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning, 17*(1), 34-63.

de Freitas, E. & Sinclair, N. (2014). *Mathematics and the Body: Material Entanglements in the Classroom*. Cambridge: Cambridge University Press.

Gallese, V. & Lakoff, G. (2005). The brain's concepts: The role of the sensory-motor system in conceptual knowledge. *Cognitive Neuropsychology, 22*(3/4), 455-479.

Goldin-Meadow, S. (2003). *Hearing gesture: How our hands help us think*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Lakoff, G. & Núñez, R. (2000/2005). *Where Mathematics comes from. How the embodied mind brings mathematics into being*. (O. Robutti, F. Ferrara & C. Sabena: *Da dove viene la matematica. Come la mente embodied dà origine alla matematica*, Trad.). Torino: Bollati Boringhieri, 2005.

McNeill, D. (Ed.) (2000). *Language and gesture: Window into thought and action*. Cambridge: Cambridge University Press.

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (MIUR, 2012). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell'infanzia e del primo ciclo d'istruzione*. Roma, settembre 2012.

Nemirovsky, R. (2003). Three conjectures concerning the relationship between body activity and understanding Mathematics. In N.A. Pateman, B.J. Dougherty & J.T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1*, 105-109. Honolulu, HI: University of Hawai'i.

Nemirovsky, R. & Ferrara, F. (2009). Mathematical imagination and embodied cognition. *Educational Studies in Mathematics, 70*, 159-174.

Nemirovsky, R., Kelton, M.L. & Rhodehamel, B. (2013). Playing mathematical instruments: Emerging perceptuomotor integration with an interactive mathematics exhibit. *Journal for Research in Mathematics Education, 44*(2), 372-415.

Radford, L. (2009). Why do gestures matter? Sensuous cognition and the palpability of mathematical meanings. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 111-126.

Radford, L. (2014a). Towards an embodied, cultural, and material conception of mathematics cognition. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 46*(3), 349-361.

Radford, L. (2014b). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal, 26*(2), 257-277.

Radford, L., Edwards, L. & Arzarello, F. (Eds.) (2009). Beyond words. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 91-95.

Roth, W. M. (2009). Bodily experience and mathematical conceptions: From classical views to a phenomenological reconceptualization. *Educational Studies in Mathematics, 70*(2), 175-189.

Schiralli, M. & Sinclair, N. (2003). A constructive response to 'Where mathematics comes from'. *Educational Studies in Mathematics, 52*(1), 79-91.

Seitz, J. A. (2000). The bodily basis of thought, new ideas in psychology. *An International Journal of Innovative Theory in Psychology, 18*(1), 23-40.

Sfard, A. (2008/2009). *Thinking as Communicating: Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing*. (G. Lo Iacono: Psicologia del pensiero matematico. Il ruolo della comunicazione nello sviluppo cognitivo, Trad.). Trento: Centro Studi Erickson, 2009.

Testera, M., Morselli, F. & Sibilla, A. (2011). "Pensa un numero…". Attività argomentative nella scuola secondaria di primo grado. In O. Robutti & M. Mosca (a cura di), *Il laboratorio in matematica e in fisica. Atti del IV Convegno Nazionale di DIdattica della FIsica e della MAtematica DI.FI.MA. 2009*, 213-225. Torino: Kim Williams Books.

Wilson, M. (2002). Six views of embodied cognition. *Psychonomic Bulletin & Review, 9*(4), 625-636.